vectoriel de V, pour toute famille $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_p\} \subseteq V$.

$\boxed{\text{Exemple 4.29}^*}$ On pose $V = \mathbb{P}$.

On pose $\mathcal{F} = \{ \underbrace{1 + x + x^2}_{P_1}, \underbrace{1 + x}_{P_2}, \underbrace{1}_{P_3} \} \subseteq \mathbb{P}$

Calculer Vect $\mathcal{F}$ ⟵ et trouver qq'un déjà connu !!

$\boxed{\text{Rép}}$ $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \mathbb{P}_2 \subseteq \mathbb{P}$

$\mathbb{P}_2$ ⟵ sous-esp. vectoriel de $\mathbb{P}$

(Preuve) ⊙ $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \subseteq \mathbb{P}_2$

Toute C.L d'éléments de $\mathcal{F}$ est un pol. de degré ≤ 2, car tout élément de $\mathcal{F}$ ____ ≤ 2.

⊙ $\mathbb{P}_2 \subseteq \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$, i.e. il faut montrer que

$\forall\ p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\boxed{p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3}$$

$$\boxed{a_0 + a_1 x + a_2 x^2} = \lambda_1 (1 + x + x^2) + \lambda_2 (1+x) + \lambda_3 \cdot 1$$

$$\underset{\text{déf. de + et . de } \mathbb{P}_2}{=} \boxed{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + (\lambda_1 + \lambda_2) x + \lambda_1 x^2}$$

SSi

(*)
$$\begin{cases} a_0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ a_1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ a_3 = \lambda_1 \end{cases}$$

$\longleftarrow$ SEL avec variables $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

var

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\quad} \cdots \xrightarrow{\text{OEL}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc le SEL (*) est compatible $\square$

Dans cette séance on va voir

- notion de famille génératrice
- notion d'app. lin (abstraite) $V \longrightarrow W$ deux EV.
- matrice canonique d'une app. lin. $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$
- critère d'inj et surj d'app. lin.

Déf. 4.27 (suite) On dit que $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_p\} \subseteq V$

dans un E.V. V est une famille génératrice si

$\mathrm{Vect}\,\mathcal{F} = V$

deux E.V.

Déf. 4.35 Une application $T : V \longrightarrow W$ est dite linéaire si

$$T(v + \lambda v') = T(v) + \lambda . T(v')$$

$\forall v, v' \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Rappels:

$\boxed{\text{Déf. 4.32}}$ Soit $T : V \longrightarrow W$ une application linéaire et $v \in V \longmapsto T(v)$ on l'appelle image de v

$S \subseteq V \rightsquigarrow T(S) := \{T(v) : v \in S\}$

on l'appelle ensemble image de S par T

$\rightarrow \mathrm{Img}(T) := \{T(v) . v \in V\}$

on l'appelle image de T.

Déf. 4.33 Pour une application linéaire $T : V \to W$

on dit que T est

→ $\boxed{\text{injective}}$: $T(v) = T(v') \implies v = v'$ pour tous $v, v' \in V$

→ $\boxed{\text{surjective}}$: $\forall w \in W \ \exists v \in V$ t.q. $w = T(v)$

→ $\boxed{\text{bijective}}$ = injective & surjective

Rq

- $T : V \to W$ est surjective $\Longleftrightarrow \operatorname{Im}(T) = W$
- $T : V \to W$ est bijective $\Longleftrightarrow \exists\, S : W \to V$ app. telle que $S \circ T = id_V$ et $T \circ S = id_W$

on écrit T^{-1} au lieu de S

Notation : $id_X : X \to X$, $x \mapsto x$ est l'application identité

Exemple

$T : \mathbb{P} \to \mathbb{R}^2$

$$T(p) = \begin{pmatrix} \int_0^1 p(t)\,dt \\ p'(1) \end{pmatrix}$$

intégrale

dérivée

Montrer que T est app. lin et déterminer si elle est surjective.

$\boxed{T \text{ lin}}$ On veut $T(p+\lambda q) = T(p) + \lambda T(q)$ $\quad p,q \in P$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$T(p+\lambda q) = \begin{pmatrix} \int_0^1 (p(t)+\lambda q(t))\,dt \\ (p+\lambda q)'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 p(t)\,dt + \lambda \int_0^1 q(t)\,dt \\ p'(1) + \lambda q'(1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \int_0^1 p(t)\,dt \\ p'(1) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \int_0^1 q(t)\,dt \\ q'(1) \end{pmatrix} = T(p) + \lambda T(q)$$

$\boxed{T \text{ surj}}$ ① On veut montrer que, c.à.d. $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$\exists\, p \in P$ t.q. $T(p) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

On suppose $p \in \mathbb{P}_1$ i.e. $p(t) = a_0 + a_1 t$

Alors $T(p) = \begin{pmatrix} a_0 + \frac{a_1}{2} \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} a_0 + \frac{1}{2} \cdot a_1 = a \\ a_1 = b \end{cases} \iff \boxed{\begin{matrix} a_0 = a - \frac{b}{2} \\ a_1 = b \end{matrix}}$$

② $T(\underset{t^0}{1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad T(t) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Alors $\mathrm{Img}(T) \supseteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Comme $\boxed{\mathrm{Img}(T) \text{ est un SEV de } \mathbb{R}^2}$,

alors $\underbrace{\mathrm{Img}(T) \supseteq \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/2\\1\end{pmatrix}\right\}}_{= \mathbb{R}^2 \text{ (un calcul)}}$

$\mathbb{R}^2 \supseteq$ (par déf)

$\Longrightarrow \mathrm{Img}(T) = \mathbb{R}^2$ i.e. T surjective □

C'est un résultat important !

$\boxed{\text{Déf. } 4.42}$ Pour $T : V \to W$ app. lin,

$\mathrm{Ker}(T) := \{ v \in V : T(v) = 0_W \}$

Lemme 4.43 Pour $T : V \to W$ app. lin

T injective $\iff$ $Ker(T) = \{0_V\}$

Lemme 4.45 Pour $T : V \to W$ app lin

$Ker(T)$ est SEV de V
$Img(T)$ est SEV de W

Lemme 4.41 Pour $T : V \to W$ app. lin bij

alors $T^{-1} : W \to V$ est une app. lin.

Déf Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une appl. lin., on définit la matrice canonique de T :

$$\begin{array}{c} \\ m \text{ lignes} \end{array} \left\{ [T] = \underbrace{\begin{bmatrix} T(\bar{e}_1) & \dots & T(\bar{e}_n) \end{bmatrix}}_{n \text{ colonnes}} \right.$$

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad \bar{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

THM 3.22 Pour $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ appl. lin

$$T\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = [T]\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}, \ \forall \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$$

THM. 4.46 | Pour $T:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une app. lin.

Les cond. suivantes sont équiv:

(i) T injective

(ii) $\operatorname{Ker}(T) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$

(iii) le SEL $[T].\bar{x} = 0_{\mathbb{R}^m}$ admet uniquement la sol. triviale

(iv) les colonnes de T forment une famille libre de $\mathbb{R}^m$

(v) la FER de $[T]$ n'a pas de var. libres

(vi) la FER de $[T]$ possède un pivot par colonne.

$\Longrightarrow \boxed{n \leq m}$